

Геол. ан. Балк. пол. Ann. Géol. Penins. Balk.	60	1	159-168	Београд, децембар 1996 Belgrade, Decembre 1996
--	----	---	---------	---

УДК 551.243:550.34.012

Оригинални научни рад

ДЕТЕРМИНАЦИЈА ПАЛЕОСТРЕС ТЕНЗОРА ПРИМЕНОМ ИНВЕРЗНОГ МЕТОДА

од

Бранислава Благојевића* и Бранислава Тривића**

Инверзни метод који се у свету интензивно развија током последње деценије, представља робустан математичко–статистички поступак реконструкције палеострес тензора на основу мерених површи механичког дисконтинуитета и a -линеације (стрија) на њима. С обзиром на све интензивнију примену, овај рад има за циљ да прикаже основне теоријске поставке самог метода.

Кључне речи: палеострес тензор, инверзни метод, минимализација, руптуре, a -линеација (стрије).

УВОД

У структурним апализама од суштинске важности је реконструкција елипсоида деформација, односно детерминација просторног положаја оса стреса. То следи из чињенице да је управо стрес генератор тектонских деформација стена и индуковања папонског стања у њима.

Класичан метод (Anderson, 1942) омогућава реконструкцију оса стреса првенствено на основу спрегнутих система површи смицања. Осе максималног и минималног стреса се налазе у равни управној на пресецици коњугованих површи, односно на осу средњег стреса и колинеарне су са бисектрисама углова које заклапају ове површи. Код појединачних руптура (некоњугованих планара) осе максималног и средњег стреса су фиксирани, у зависности од кретања по датој руптури, за одређену угловну вредност (30–40°) у односу на a -линеацију.

Половином 70-тих година развијен је метод правих диедара (Angelier and Mechler, 1977), који омогућује детерминацију поља компресије, односно тензије коиструкцијом нодалие равни управне на мерену a -линеацију (стрије).

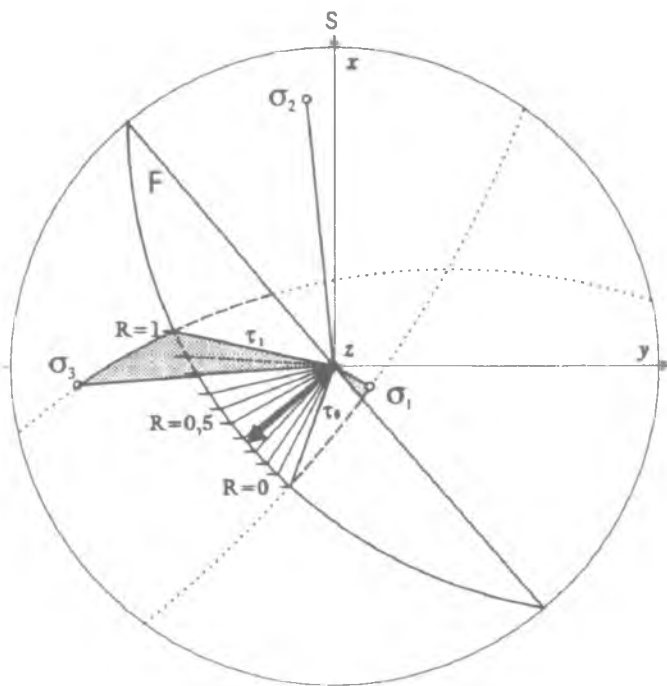
Инверзни метод је развијан током 80-тих година и омогућује детерминацију не само просторног положаја оса стреса, већ и линеарног односа њихових магнитуда, апалитичким путем. Узимајући у обзир досадашње резултате његовог истраживања, овде су презентоване теоријске поставке инверзног метода у целини уз, првенствено идејну, разраду и допуну итеративног поступака.

* Енергопројект. Ко., Б. Лењина 12, Београд.

** Рударско–геолошки факултет, Бушина 7, Београд.

ТЕОРИЈСКЕ ПОСТАВКЕ ИНВЕРЗНОГ МЕТОДА

Инверзни метод је математичко–статистички поступак минимализовања разлика теоријског и обсервираног модела, збром најмањих квадрата. Његовом непосредном примениом за N мерених руптура са нормалом n_i ($i=1, 2, \dots, n$) и стријама s_i ($i=1, 2, \dots, n$), могуће је минимализовати разлике теоријских и мерених стрија (сл. 1), преко познатог, линеарно израженог, односа главних оса стреса $R = \sigma_2 - \sigma_3 / \sigma_1 - \sigma_3$ (Both, 1959). Вредности R су из скупа од 0 до 1, при чему је $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, а $\sigma_1 \neq \sigma_3$. Тако се од укупно шест, добијају четири компоненте стрес тензора, односно његов девијаторски део T_0 , у литератури још познат и као редуковани стрес тензор (Angelier, 1989.). Девијаторски део T_0 је садржан у тензору облика $T = k_1 T_0 + k_2 I$, где су k_1 и k_2 скаларне величине, а I јединична матрица. Коришћењем параметара трења (кохезије и угла унутрашњег трења) и "скалирањем" k_1 и k_2 добија се стваријска вредност тензора T (Angelier, 1989).



Сл. 1. Компоненте девијаторског тензора на Schmidt–овој мрежи (доња хемисфера): F – раседна равна; s – реалне стрије; x, y, z – географски референтни систем; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главне осе напона; τ_0, τ_1 – пројекција σ_1 и σ_3 на равна раседа; R – теоријске стрије.

Fig. 1. Deviation tensor components on Schmidt net (lower hemisphere): F – fault plane; s – real striation; x, y, z – geographic reference system; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – principal stress axes; τ_0, τ_1 – projections of σ_1 and σ_3 on fault plane; R – theoretical striation.

Прелиминарне претпоставке које при примени овог метода морају бити испуњене су:

– да је анализирана популација руптура (раседа, пукотине смицања итд.) резултат, односно последица *истој кинематској акцији*;

– да се кретања по *јединачним руйиурама одвијају независно*, под дејством истог просечног стреса, релативно хомогеног за анализирано подручје.

Поступак минимализације разлика теоријских и мерених стриа се може извршити на два начина: директном инверзијом и итерацијом.

ДИРЕКТАН ИНВЕРЗНИ МЕТОД

Суштина овог метода је у *директној регресији – минимализацији* компоненте тангенцијалног стреса $\bar{\rho}$ (сл. 1) нормалног на мерене стрије \bar{s} (Angelier, 1979). Тако се, заправо, директно срачунава максимална вредност нормалног стрес тензора, тј детерминише раван у којој нема смицања. Наиме, тензор који индукује стрес на руптурној површи је:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \psi & d & e \\ d & \cos(\psi + \frac{2\pi}{3}) & f \\ e & f & \cos(\psi + \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Стрес, пак, који делује на самој површи је онда $\sigma = T \cdot \bar{n}$ где је \bar{n} јединични вектор нормале на раван (са смером навнше). Постављањем новог вектора \bar{o} у равни раседа, нормалног на мерене стрије \bar{s} , вредност тангенцијалног напона $\bar{\rho}$ се добија као скаларни производ $\rho = \bar{o} \cdot \bar{\sigma}$ (сл. 2). Отуда Функција минимализовања има следећи облик:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \rho_i^2, (i=1,2,\dots,n)$$

Вредност тангенцијалне компоненте $\bar{\rho}$ по косинусу правца ψ ће бити минимална у оним тачкама равни у којима је први извод функције $f(x)$ једнак нули;

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial d} = 0; \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial e} = 0; \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial f} = 0;$$

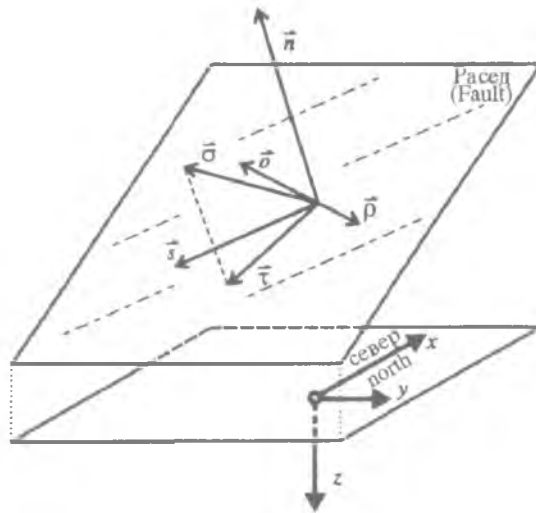
Налажењем првих извода формира се нормалан систем од четири једначине, чијим се решавањем добијају вредности компоненти d , e , f и ψ тензора T . Увођењем девијатора у матрицу тензора и налажењем сопствених вектора и њихових сопствених вредности, локализују се осе максималног, средњег и минималног стреса, те добија вредност R , која представља релативан однос њихових магнитуда.

ИТЕРАТИВИИ МЕТОД

Итеративни метод је релативно једноставан математички поступак *нелинеарне минимализације* угла који заклапају теоријске и реалне (теренски обсервиране) стрије у раседној површи. Он омогућује детерминацију девијаторског стрес тензора T_0 итерацијама инцијалног – теоријског модела у неколико сукцесвних корака.

а) *Постављање уницијалног модела* – Подразумева фиксирање три главне осе стреса ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) у географском референтном систему x, y и z . Лоцирање оса

стреса мора бити руковођено чврстим геолошким резонем. Идикатори њиховог просторног положаја су теренски прикупљени подаци о руптурама и карактеру кретања, која се по њима у датом величинском подручју не могу занемарити. Анализом резултата статистичке обраде руптура и стрија утврђених на њима, методом правих диједара, Андерсоновим методом, као и на основу низа других структурних феномена (коњуговани системи руптура, перасте пукотине развијене уз расед, стилолити и др.), фиксирају се почетни, односно иницијални положаји оса стреса.



Сл. 2. Компоненте тензора на раседној равни: x, y, z – географски референтни систем. $\vec{\sigma}$ – стрес који делује на раван раседа, \vec{s} – јединични вектор стрија, \vec{n} – јединични вектор нормале на расед, $\vec{\rho}$ – компонента тангенцијалног напона управна на мерене стрије \vec{s} , \vec{o} – јединични вектор управан на стрије \vec{s} колинеаран и супротно усмерен од $\vec{\rho}$, $\vec{\tau}$ – пројекција стреса $\vec{\sigma}$ на раван раседа.

Fig. 2. Tensor components on fault plane: x, y, z – geographic reference system; $\vec{\sigma}$ – stress acting on fault plane; \vec{s} – unit vector of striation; \vec{n} – unit vector of the normal to fault; $\vec{\rho}$ – tangential strain component perpendicular to measured striation \vec{s} , \vec{o} – unit vector perpendicular to striation \vec{s} , colinear and counter-directed than $\vec{\rho}$, $\vec{\tau}$ – stress $\vec{\sigma}$ projection on fault plane.

Погрешан избор иницијалног система може, у математичком смислу, да води ка секундарним минимумима и линеаризацији, што у коначном психоду даје погрешне резултате.

б) *Израчунавање редукованог стрес тензора* – Подразумева налажење функције $f(R)$ из иницијалног положаја оса стреса. Сагласно ранијем, вредности функције варирају у интервалу $\tau_0 - \tau_1$, тј. величини R од 0 до 1 са прираштајем 0.1 и примењују се на сваку руптуру из скупа N , ради срачунавања теоријских стрија (сл. 1). Након тога се збиром најмањих квадрата налази *минимална угловна девијација* теоријских и реалних стрија, односно вредност девијаторског стреса, најближа теоријском моделу.

ц) *Итерација иницијалног модела* – Подразумева диференцијално мала *помериња* иницијалног положаја оса стреса и вредности R у циљу налажења вредности девијаторског – редукованог стрес тензора, која оптимално одговара теоријском моделу.

ЗАКЉУЧАК

Иверзни метод несумњиво представља квалитативан скок у структурним анализама руптурног склопа. С једне стране примена овог метода омогућава квантификацију облика стрес елипсоида (stress ellipsoid shape ratio), а с друге квантификацију стварне вредности палеостреса у датом периоду геолошке историје. Отуда се непосредно може применити у реконструкцији тектонске еволуције, у инжењерско-геолошким калкулацијама напонског стања у стенама, у утврђивању услова прерудне и пострудне тектонике при истраживању лежишта минералних сировина, као и у другим геолошким дисциплинама.

Но, поред добрих страна итеративни метод, као и сваки други математички поступак, који природне процесе покушава да апроксимира и преведе у математичке форме, има својих ограничења и недостатака. С тога се овај метод, при решавању геолошких проблема, мора крајње критички примењивати, посебно у комплексно израседаним и вишефазно убраним теренима, какви су терени на просторима наше земље.

Геол. ан. Балк. пол. Ann. Géol. Penins. Balk.	60	1	159-168	Београд, децембар 1996 Belgrade, Decembre 1996
--	----	---	---------	---

UDC 551.243:550.34.012

Original scientific paper

PALEOSTRESS TENSOR DETERMINATION BY INVERSE METHOD

by

Branislav Blagojević* and Branislav Trivić**

The inverse method, developed and improved in the last decade, is a robust mathematical statistical procedure of the paleostress tensor reconstruction on measured planes of mechanical discontinuity and a–lineation (striation) on them. Its increasing use is the reason for this presentation of the fundamental principles of the method.

Key words: paleostress tensor, inverse method, minimization, fractures, a–lineation (striation).

INTRODUCTION

Reconstruction of the deformation ellipsoid, or determination of the three–dimensional position of stress axes, is fundamental for a structural analysis, because stress is the generator of structural deformation and of strain state induction in rocks.

The classical method (Anderson, 1942) can be used to reconstruct stress axes primarily on the basis of conjugate systems of shear planes. The axes of the greatest and least stresses lie in the plane perpendicular to the conjugate planes intersection, i.e. to the axis of mean stress, and are colinear with bisectrices of angles between these planes. In some fractures (unconjugate planes), axes of the greatest and least stresses are fixed, depending on the movement along the fracture, for determined angular value (30° – 40°) in relation to a–lineation.

The method of straight dihedrons was developed in mid–seventies (Anglier and Mechler, 1977), which enables determination of the compression, or tension, field from the imaginary model plane perpendicular to the measured a–lineation (striation).

The inverse method, developed in the eighties, allows an analytical determination not only of the three–dimensional position of stress axes, but also of the linear relation of their magnitudes. Taking into consideration the results of its study, this article presents theoretical statements of the inverse method on the whole, and primarily conceptual, elaboration and extension of the iterative procedure.

* Energoprojekt Co, Bulevar Lenjina 12, Belgrade.

** Faculty of Mining and Geology, Džušina 7, Belgrade.

THEORETICAL STATEMENTS OF THE INVERSE METHOD

The inverse method is a mathematical–statistical procedure for minimization of differences between the theoretical and the measurement models by the sum of least squares. Its direct application for N measured fractures with normal n_i ($i=1, 2, \dots, n$) and striation s_i ($i=1, 2, \dots, n$) can minimize the difference between the theoretical and measured striations (Fig. 1) via the known, linearly expressed, relations of principal stress axes $R=\sigma_2-\sigma_3/\sigma_1-\sigma_3$ (Both, 1959). R values are from the set from 0 to 1, at $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, and $\sigma_1 \neq \sigma_3$. Thus, four of the total six components of the stress tensor are obtained, or its deviation T_0 , also referred to in literature as the reduced stress tensor (Anglier, 1989). The deviation T_0 is contained in the tensor of the form $T=k_1T_0+k_2I$, where k_1 and k_2 are scalars and I is unit matrix. The actual value of tensor T is obtained using the friction parameter (cohesion and angle of internal friction) and "scalation" of k_1 and k_2 (Anglier, 1989).

The preliminary assumptions which must be satisfied for the use of this method are:

- that the analysed fracture (faults, shear cracs, etc.) population was a result, or consequence, of the **same kinematic act**;
- that the movements on **existing, discrete fractures are independent**, under the effect of the same average stress, relatively homogeneous for the analysed area.

There are two procedures for minimization of differences between the theoretical and measured striations: direct inversion and iteration.

THE DIRECT INVERSE METHOD

This method is essentially a direct regression – minimization of the tangential stress component $\bar{\rho}$ (Fig. 1) normal to the measured striation \bar{s} (Anglier, 1979). It is, in fact, a direct calculation of the highest value of the normal stress tensor, i.e. determination of the shearless plane. The tensor inducing stress on the fracture plane is:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \psi & d & e \\ d & \cos(\psi + \frac{2\pi}{3}) & f \\ e & f & \cos(\psi + \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Then the stress acting on the plane itself is $\sigma = T \cdot \bar{n}$, where \bar{n} is unit vector of the normal to the plane (upward directed). Setting a new vector \bar{o} in the fault plane, normal to measured striation \bar{s} , the obtained value of the tangential strain $\bar{\rho}$ is a scalar product, $\rho = \bar{o} \cdot \bar{\sigma}$ (Fig. 2). Hence the minimization function can be written as:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \rho_i^2, (i=1, 2, \dots, n)$$

The value of tangential component $\bar{\rho}$ in cosine direction ψ will be the least in points of the plane where the first derivative of function $f(x)$ is equal to zero;

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial d} = 0; \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial e} = 0; \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial f} = 0;$$

When the first derivatives have been found, a normal system of four equations is formed and each solved for values of components d, e, f, and ψ of tensor T. By introducing deviator in the tensor matrix and finding own vectors and their own values, the axes of the greatest, mean, and least stresses are localized, and R value is obtained, which represents the relative relation of their magnitudes.

THE ITERATION METHOD

The iteration method is a relatively simple mathematical operation of **nonlinear minimization** of the angle between the theoretical and real (field observed) striations in a fault plane. It is used to determine the deviating stress tensor T_0 by iteration of the initial, theoretical, model in several successive steps.

a) **Setting up initial model** means fixing three principal axes of the stress (σ_1 , σ_2 , σ_3) in the geographic reference system x, y, z. Location of stress axes must be guided by sound geological reasoning. The indications of its three-dimensional position are field-collected information on fractures and the character of movement, which cannot be neglected in the given field of magnitude. Analytical results of the statistical processing of fractures and striations on fractures by the method of straight dihedrons, Anderson method, and on the basis of many other structural phenomena (systems of conjugate fractures, feather jointing in faults, stylolites, etc.) fix the initial positions of stress axes.

A wrong selection of the initial system may, in mathematical terms, lead to secondary minima in lineation, and eventually to wrong results.

b) **Calculating reduced stress tensor** means derivation of function f (R) from the initial position of stress axes. Like above, the function values vary within the interval $\tau_0 - \tau_1$, i.e. R quantity from 0 to 1 at 0.1 increment, and are applied to each fracture of set N, for calculation of the theoretical striation (Fig. 1). Then, the sum of least squares is used to find **the least angular deviation** of both theoretical and real striations, or the value of the deviating stress, closest to the theoretical model.

c) **Iteration of the initial model** means **differential small displacements** from the initial stress axis positions and R value for finding the value of the deviating, reduced stress tensor, which is an optimum equivalent to the theoretical model.

CONCLUSION

The inverse method is certainly a qualitative upgrade in the structural analysis of fracture patterns. The use of the method enables quantification of the stress ellipsoid shape ratio on one hand, and quantification of the actual paleostress value in the given period of the geologic history on the other. Hence, it can be used in reconstructions of the tectonic evolution, in engineering-geological calculations of the strain state in rocks, in establishing conditions of pre-ore and post-ore tectonics during explorations of mineral resources, and in other geologic disciplines.

Besides the advantages, the iteration method, like any other mathematical procedure, which attempts to approximate and translate natural processes into mathematical forms, has its limitations and inadequacies. This method, therefore, must be critically applied to geological problems, particularly in complex fault and manifold areas, as those in this country.

ЗИТЕРАТУРА – REFERENCES

- Anderson E. M., 1942: *The Dynamics of Faulting*.— Oliver and Boyd (2nd ed.), 206 pp., Edinburgh.
- Angelier J. AND Mechler P., 1977: *Sur une methode graphique de recherche des contraintes principales egalement utilisables en tectonique et en seismologie: la methode des diedres droits*.— Bull. Soc. Geol. France, (7), XIX, N° 6, 1309–1318, Paris.
- Angelier J., 1979: *Determination of the mean principal stresses for a given fault population*.— *Tectonophysics* 56, T17–T26, Amsterdam.
- Angelier J., 1989: *From orientation to magnitudes in paleostress determination using fault slip data*.— *J. Struct. Geol.* 11, N° 1/2, 37–50, Oxford.
- Both M. H. P., 1959: *The mechanisms of oblique slip faulting*. — *Geol. Mag.*, 96(2), 109–117.